# PROJET 3

Toutes les questions (sauf indication contraire) devront être faites à l'aide de MAPLE.

## 1 Les nombres premiers de Mersenne.

**Question 1:** Construire la liste $L$ des nombres entiers de la forme $2^i - 1$ pour $i \in [1, 10]$.

On appelle *nombres de Mersenne* les nombres premiers de la forme $2^i - 1$.
**Question 2:** Construire à partir de la liste $L$ une liste $L1$ des nombres de Mersenne contenus dans la liste $L$.

**Question 3:** Construire cette même liste, que l'on appellera $L2$, à l'aide d'une fonction de MAPLE que l'on cherchera dans l'aide en ligne (on utilisera la valeur du nombre d'éléments contenus dans la liste $L1$).

**Question 4:** Vérifier à l'aide d'une instruction simple que l'on a bien construit deux listes identiques.

## 2 Tests de primalités et algorithmes de recherche de nombres premiers.

On appelle *nombre de Fermat*, et on notera $F_n$ $(n \in \mathbb{N})$, un nombre de la forme $2^{2^n} + 1$.
**Question 5:** Ecrire une procédure qui, connaissant $n$, renvoie la valeur de $F_n$. Tester cette procédure pour $n \in [0, 5]$.

**Question 6:** Ecrire une procédure qui, pour un entier naturel non nul donné, renvoie sa décomposition en facteurs premiers.

Une propriété des nombres de Fermat : *Si $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, alors $F_n$ et $F_m$ sont premiers entre eux.*
**Question 7:** Vérifier à l'aide d'une procédure cette propriété pour tous $n, m \in [0, 5]$.

Dans les questions 8 à 10, il est question de montrer via différents algorithmes que les 4 premiers nombres de Fermat sont premiers. On testera donc chaque procédure sur les nombres $F_0$, $F_1$, $F_2$, $F_3$.

*Si $n \in \mathbb{N}^\star$ est composé (ie non premier), alors il existe un diviseur premier $p$ de $n$ tel que $p \leq \sqrt{n}$.*
**Question 8:** En déduire une procédure qui affiche la liste des nombres premiers entre 2 et 270.

Soit $\phi$ la fonction indicatrice d'Euler : $\phi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ *définie par : $\phi(n)$ = nombre d'entiers positifs inférieurs à $n$ et premiers avec $n$.*
**Question 9:** Démontrer (sans utiliser nécessairement MAPLE) la proposition suivante : $\phi(p) = p - 1$ *ssi $p$ est premier.* En déduire une procédure testant la primalité d'un nombre entier $n$ non nul donné.

Théorème de Wilson : *Soit $p \in \mathbb{N}^\star$, $p$ est premier ssi* $(p-1)! \equiv (p-1)[p]$.

**Question 10:** En déduire une procédure testant la primalité d'un nombre donné.

**Question 11:** Discuter des limites de la procédure ci-avant.

# 3 Distribution et raréfaction des nombres premiers.

Il est facile de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. Par ailleurs leur répartition est irrégulière. En effet, pour tout $n \geq 2$, il est toujours possible de trouver une suite de $n$ entiers consécutifs non premiers : $(n+1)!+2$, $(n+1)!+3$,...,$(n+1)!+(n+1)$. Nous allons ainsi étudier dans cette dernière partie la distribution des nombres premiers.

**Question 12:** Construire une fonction $\Pi$ qui associe au nombre entier $n$ le nombre de nombres premiers entre 2 et $n$ inclus. Tester la procédure sur quelques exemples.

On veut donner une représentation graphique de cette fonction pour les entiers entre $100$ et $3000$. Long à calculer pour $n$ grand, on souhaite la tracer seulement pour des valeurs de $n$ allant de $100$ en $100$.

**Question 13:** Mettre en mémoire dans une liste ces valeurs de $n$. Calculer les valeurs de $\Pi(n)$ que l'on mettra en mémoire dans une liste $P$. Tracer ensuite cette représentation graphique, on l'appellera $NP$.

A l'âge de 15 ans en 1792, Gauss a conjecturé que, asymptotiquement : $\Pi(x) \sim \frac{x}{ln(x)}$.

**Question 14:** Vos résultats permettent-ils de corroborer cette conjecture?

Cette conjecture s'est révélée vraie et ce fait est maintenant connu sous le nom de *théorème des nombres premiers.* Cependant cette aproximation n'est pas excellente et peut être améliorée si l'on considère : $\frac{x}{ln(x)} \sim Li(x)$. La fonction $Li$ s'appelle *Logarithme intégral* et est définie pour $x > 1$ par :

$$Li(x) = VP \int_0^x \frac{1}{ln(t)} dt$$

($VP$ est la valeur principale au sens de Cauchy). Cette fonction est connue de MAPLE sous le nom $Li$.

**Question 15:** La représenter sur l'intervalle $[100, 3000]$ avec $NP$.

La démonstration du *théorème des nombres premiers* a été faite au XVIIIème siècle par Hadamard et De la Vallée Poussin et utilise en autres des résultats sur les zéros de la *fonction Zeta de Riemann*.

Outre cette démonstration, l'erreur a été calculée :

$$\Pi(x) = Li(x) + O(xe^{-A\sqrt{log(x)}})$$

où $A$ est une constante positive.

**Question 16:** Vos résultats permettent-ils de corroborer ce résultat?

Une autre approche : on considère une nouvelle fonction $\Pi$ définie pour $n$ entier strictement positif par

$$\Pi(n) = \sum_{k=2}^{n} E[\frac{(k-1)!+1}{k} - E[\frac{(k-1)!}{k}]]$$

où $E[\quad]$ désigne la partie entière d'un nombre.

**Question 17:** Calculer, avec les mêmes valeurs de $n$ que pour la liste $P$, la liste $P0$ des valeurs de la nouvelle fonction $\Pi$. Comparer $P$ et $P0$.